فصلنامه مطالعات کاربردی در علوم اجتماعی و جامعه‌شناسی
سال هشتم، شماره ۵ (پیاپی: ۳۷)، زمستان ۱۴۰۴

گشودن درهای انتزاع؛ طراحی مسیرهای مفهومی برای آموزش موثر جبر مجرد

علی شویعی نژاد[۱]، فرزانه نوروزی لرکی[۲]، محمد علی چلداوی[۳]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۰۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۳۰
کد مقاله: ۲۸۳۳۰

چکـیده

آموزش جبر مجرد و به ویژه مبحث نظریه گروه ها به دلیل ماهیت انتزاعی و سطح بالای تجرید مفاهیم، یکی از دشوارترین بخش‌های برنامه درسی ریاضیات دانشگاهی به شمار می‌رود و چالش‌های جدی در درک، اثبات و انتقال مفاهیم برای دانشجویان ایجاد می‌کند. در پژوهش حاضر که با بهره گیری از روش های پژوهش های پیشین و به صورت شبیه سازی شده و با اندکی تغییرات به گزارش آن خواهیم پرداخت، با هدف شناسایی دقیق این پیچیدگی‌های مفهومی و طراحی راهکارهای آموزشی مبتنی بر رویکردهای نوین، از ابزار مفهومی جدیدی به نام CI2GT برای ارزیابی درک مفهومی دانشجویان از نظریه مقدماتی گروه بهره بردیم. و در قالب طراحی پیش آزمون-پس آزمون با ۱۴۳ دانشجو معلم به ارائه نتایج کمی پرداختیم. یافته‌ها از یک سو نشان دهنده سه نوع دشواری رایج در یادگیری نظریه گروه هستند و از سوی دیگر، ارزیابی نهایی از مفهوم تدریس هیلدسهایم را ارائه می دهند و میزان پیشرفت یادگیری دانشجویان در زیر حوزه های مختلف نظریه گروه را بررسی می کنند.نتایج این مطالعه به درکی تجربی از ابعاد آموزشی نظریه گروه منجر می شود و فاصله میان پژوهش های کمی و کیفی در آموزش جبر مجرد را کاهش می دهد، که تاکنون کمتر به آن پرداخته شده است.

واژگـان کلـیدی: جبر مجرد، نظریه گروه، آموزش ریاضی، مشکلات یادگیری، روش های آموزشی

۱ – دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضیات و کاربردها- جبر، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران و دبیر ریاضی
alishooveiee@gmail.com
۲ – استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران
۳ – دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضیات و کاربردها، توپولوژی، دانشگاه شهید چمران اهواز

۱- مقدمه

جبر مجرد به عنوان یکی از شاخه‌های کلیدی ریاضیات دانشگاهی، نقشی بنیادین در توسعه تفکر انتزاعی و توانایی اثبات ریاضی در دانشجویان ایفا می‌کند. این شاخه با تمرکز بر مفاهیم کلی مانند گروه‌ها، حلقه‌ها و میدان‌ها، ساختارهای جبری را در سطحی انتزاعی و فراتر از نمونه‌های خاص بررسی می‌کند. با این حال، ماهیت انتزاعی و زبان رسمی دقیق جبر مجرد، یادگیری آن را به چالشی جدی برای دانشجویان تبدیل کرده است. مطالعات اخیر نشان می‌دهند که مشکلات مفهومی دانشجویان در آموزش جبر مجرد و به ویژه نظریه گروه ها، ناشی از دشواری در انتقال از مثال‌های عینی به تعاریف رسمی، ضعف در تجسم ساختارهای جبری و ناتوانی در اثبات قضایا است .این چالش‌ها در نظام‌های آموزشی سنتی که مبتنی بر سخنرانی یک طرفه و تمرکز بر تعاریف و قضایا بدون زمینه‌سازی و مثال‌های ملموس هستند، تشدید می‌شوند و می‌توانند منجر به درک سطحی، اضطراب ریاضی و حتی ترک تحصیل در رشته‌های ریاضی شوند.به عنوان نمونهFagan,Melhuish (2018)از طریق بررسی نمونه ای از ۲۸۶ دانشجوی کارشناسی دریافتند که دانشجویان اغلب ویژگی های پایه ای چون شرکت پذیری و جابه جایی را با هم اشتباه می گیرند یا بیش از حد تعمیم می دهند.این یافته ها با مطالعاتی مانند تحقیق لارسن(۲۰۱۰) که از روش آموزش تجربی استفاده کرد،تایید شده اند. مفاهیم جبر مجرد فرصت‌هایی مثبت نیز برای رشد نگرش‌های ریاضی و ویژگی‌های عاطفی یادگیرندگان فراهم می‌آورد. به طور خاص، شرکت‌کنندگان در دوره‌های آموزشی که مفاهیم ساختارهای جبری (مانند گروه‌ها) را معرفی می‌کنند، تغییرات مثبتی در باورها و دیدگاه‌های آموزشی خود نشان داده‌اند.با بررسی مطالعات گذشته، دو نکته برجسته می‌شود:

الف) بخش عمده‌ای از پژوهش‌ها در این حوزه، کیفی هستند و ابزارهای سنجش کمی کمیاب‌اند.

ب) اکثر نمونه‌ها شامل معلمان دبیرستان و دانشجویان رشته ریاضی بوده‌اند.

برای پر کردن این خلأ، از ابزارهایی چون «ارزیابی مفاهیم نظریه گروه (GTCA) و «فهرست مفاهیم برای نظریه مقدماتی گروه (CI2GT) «بهره برده شد. در این مقاله، از CI2GT برای مطالعه آموزش نظریه گروه با دیدگاه تجربی استفاده شده و به‌ویژه، به چالش‌های مربوط به شرکت‌پذیری و جابه جایی پرداخته شده است.علاوه‌براین، پرسش مهم دیگری نیز مطرح می‌شود: آیا مزایا و دشواری‌های یادگیری جبر مجرد را می‌توان در میان معلمان مقطع ابتدایی نیز مشاهده کرد؟ مطالعاتی مانند تحقیق Chickو Harris نشان داده‌اند که بسیاری از معلمان ابتدایی دید روشنی از ارتباط مفاهیم ابتدایی با مفاهیم پیشرفته‌تر جبر ندارند. به همین دلیل، برخی پژوهشگران پیشنهاد داده‌اند که آموزش مفاهیم جبری (مانند گروه‌ها) به معلمان ابتدایی می‌تواند پایه‌ریزی خوبی برای دروس هندسه و جبر در سطوح بالاتر فراهم کند.

در نتیجه، در این مقاله تلاش شده است با استفاده از ابزار CI2GT و طرح آموزشی هیلدسهایم، از منظر تجربی به دو پرسش پاسخ داده شود:

۱ .چگونه باید اجزای آموزشی برای تدریس نظریه گروه طراحی شوند؟

۲. چه نوع دشواری‌های یادگیری در نظریه گروه قابل مشاهده است؟

همچنین در این پژوهش از روش FUGS برای حل نظامند مسائل در نظریه گروه بهره برده شد که در ادامه توضیحاتی پیرامون این روش ارائه می دهیم.

FUGS که مخفف(رسمی سازی، یکپارچه سازی، تعمیم و ساده سازی) است. یک روش نظام مند برای تحلیل و حل مسائل پیچیده در ریاضیات و علوم محسوب می شود. این چارچوب چهارگانه به شرح زیر است:

رسمی سازی: در این مرحله، مسئله یا مفهوم به زبانی دقیق و ساختار یافته بیان می شود. با تعریف دقیق متغیرها، روابط و نمادهای ریاضی، هر گونه ابهام از بین می رود. این گام، پایه ای برای تحلیل منطقی فراهم می کند.

یکپارچه سازی: هدف، کشف الگوها یا اصول مشترک میان اجزای مسئله است. با پیوند دادن بخش هایی به ظاهر نامرتبط، می توان به ویژگی های اساسی دست یافت و درک عمیق تری از مسئله پیدل کرد.

تعمیم: در اینجا قواعد کلی تری استخراج می شوند که فراتر از مسئله خاص کاربرد دارند. این امر با انتزاع و کلی نگری امکان پذیر است و راه حل های واحد را برای مسائل مشابه ارائه می دهد.

ساده سازی: پس از انجام مراحل پیشین با حذف جزئیات زائد، مسئله به شکل موجز و گویا بازنویسی می شود. این کار درک ماهیت اصلی مسئله را تسهیل می کند بی آن که از عمق آن کاسته شود.برای درک بهتر این رویکرد،مثالی از جبر مجرد ارائه می شود:

-برای تعیین چند جمله ای مینیمال $\sqrt{2}$روی Q ، مراحل زیر را دنبال می کنیم:

مرحله اول: با گسترش میدان $Q(\sqrt{2})$ روی Q شروع کنید. ما می خواهیم چند جمله ای مینیمالی را پیدا کنیم که $\sqrt{2}$ را در بر داشته باشد.

مرحله دوم: چند جمله ای $f(x)=x^2-2$ را در نظر بگیرید. این چند جمله ای در $Q[x]$ است (حلقه چند جمله ای با ضرایب در Q) و داریم: $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-2=2-2=0$ است.

مرحله سوم: از آنجایی که $f(\sqrt{2})=0$ ، چند جمله ای $f(x)=x^2-2$ دارای $\sqrt{2}$ به عنوان ریشه است.

مرحله چهارم: اکنون باید نشان دهیم که این چند جمله ای مینیمال، چند جمله ای $\sqrt{2}$ است. این بدان معنی است که نباید چند جمله ای $g(x)$ دیگری در $Q(x)$ با درجه کوچکتر وجود داشته باشد به طوری که $g(\sqrt{2})=0$

مرحله پنجم: برای اثبات این موضوع، فرض کنید یک چند جمله ای $g(x)$ در $Q[x]$ با درجه کمتراز ۲ وجود دارد به طوری که $g(\sqrt{2})=0$ باشد.

مرحله ششم: تنها چند جمله ای های ثابت در$Q[x]$ به شکل c هستند که c یک عدد گویا است.از آنجایی که درجه$g(x)$ باید کمتراز ۲ باشد، تنها حالت دیگر، یک چند جمله ای خطی است، $g(x)=ax+b$ ، که در آن aوb اعداد گویا هستند.

مرحله هفتم: اکنون $g(\sqrt{2})=\sqrt{2}a+b=0$ داریم. اگرb یا a غیرصفر باشند، این معادله غیرممکن است زیرا $\sqrt{2}$ گنگ است. بنابراین، b وa هر دو باید صفر باشند، که به معنای $g(x)=0$ است.

مرحله هشتم: از آنجایی که نشان دادیم هر چند جمله ای با درجه کمتر از ۲ نمی تواند $\sqrt{2}$ را به عنوان ریشه داشته باشد، چند جمله ای مینیمال، چند جمله ای $\sqrt{2}$ روی Q است.

در این راه حل تفصیلی، ما به مسئله یافتن چندجمله ای مینیمال $\sqrt{2}$روی Q با تمرکز بر توضیح گام به گام، اثبات و شفاف سازی مفاهیم انتزاعی نزدیک شده ایم، نظریه میدان همانطور که از طریق این مسئله نشان داده شد، شامل درک دقیق بسط های میدان و کاربردهای آن ها در جبر انتزاعی و فراتر از آن است. این رویکرد با اصول آموزش موثر مفاهیم جبر انتزاعی در کلاس ریاضیات دانشگاهی هماهنگ است.

۲-مبانی تحقیق

۲-۱- روش تحقیق

۲-۱-۱-طراحی مطالعه و نمونه‌ها

برای پاسخ به پرسش‌های پژوهش در راستای پژوهش های پیشین، دو مطالعه انجام شد:

۱ .بررسی نظرات کارشناسان با حضور ۹ کارشناس از حوزه‌های ریاضی و آموزش ریاضی.

۲ .ارزیابی کمی طرح آموزشی هیلدسهایم با ۱۴۳ دانشجومعلم.

ارزیابی کمی به‌صورت یک برنامه دو هفته‌ای در نظریه گروه اجرا شد. تدریس در این برنامه بر اساس «طرح آموزشی هیلدسهایم» انجام گرفت و ابزار CI2GT به‌صورت پیش‌آزمون–پس‌آزمون به کار گرفته شد. هر هفته از این برنامه شامل یک جلسه درس (۹۰ دقیقه)، یک جلسه تمرین (۹۰ دقیقه) و یک برگ تمرین خانگی بود.

در هفته اول، مفاهیم گروه‌ها از طریق گروه‌های دیهدرال D_3 و D_4 آموزش داده شد، مطابق با طرح هیلدسهایم.

در هفته دوم، تمرکز بر گروه‌های دوری (Z_n) و کاربردهای نظریه گروه بود.

دانشجویان شرکت‌کننده، دانشجومعلمان مقطع ابتدایی در ترم اول بودند. از آنجا که این دانشجویان پیش‌زمینه‌ای در جبر مجرد نداشتند، انتظار می‌رفت که پیش‌آزمون نمره پایینی گرفتند، که در تحلیل‌ها نیز بررسی شد.

۲-۲-ابزارها

برای سنجش درک مفهومی دانشجویان از نظریه مقدماتی گروه‌ها، از ابزار CI2GT استفاده شد. این ابزار شامل ۲۰ پرسش چند گزینه‌ای با دو بخش بود:

بخش اول: انتخاب یکی از گزینه ها، که تنها یکی از گزینه ها صحیح است.

بخش دوم: تعیین میزان اطمینان پاسخ‌دهنده از پاسخ خود در مقیاس ۵ امتیازی (۱ = حدس زدم، ۵ = کاملاً مطمئن بودم).

تنها زمانی امتیاز کامل برای یک سوال در نظر گرفته می‌شد که پاسخ درست و میزان اطمینان ۴ یا ۵ باشد. اگر شرکت‌کننده اطمینان پایین‌تری (۱ تا ۳) اعلام می‌کرد، حتی با پاسخ درست، امتیاز نمی‌گرفت.

قابلیت اعتماد ابزار، با آلفای کرونباخ ۰/۷۶ گزارش شده است.

برای تحلیل رشد یادگیری در موضوعات مختلف، از یک نظرسنجی از متخصصان (N=9) استفاده شد. در این نظرسنجی، از کارشناسان خواسته شد هر پرسش از آزمون CI2GT را به یکی یا چند مورد از ۶ زیربخش نظریه گروه مرتبط کنند:

D1 نظریه مجموعه ساده، عملیات دوتایی، شرکت‌پذیری، جابجایی

D2 عنصر واحد و معکوس‌ها
D3 جدول‌های کیلی
D4 گروه‌های دوری و دی هدرال
D5 زیرگروه‌ها
D6 ایزومورفیسم
در مرحله بعد، این زیربخش‌ها در ۳ حوزه کلی ترکیب شدند:
حوزه ۱: مفاهیم پایه‌ای(D1)
حوزه ۲: مفاهیم مقدماتی(D2 + D3)
حوزه ۳: مفاهیم میانی(D4 + D5 + D6)

۲-۳-تحلیل داده‌ها

۳.۳.۱ تحلیل برای پاسخ به پرسش اول(RQ1)

برای بررسی پیشرفت یادگیری، نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون با استفاده از شاخص g هِیک (Hake's g) مقایسه شد. این شاخص مشخص می‌کند چه بخشی از «ظرفیت ممکن برای پیشرفت» محقق شده است.

طبق تعریف، اگر دانشجویی حداقل ۵۰٪ نمره پس‌آزمون را کسب کرده باشد، درک مفهومی مناسب تلقی می‌شود. مقایسه‌های آماری بین نمرات از طریق آزمون Wilcoxon signed-rank و آزمون Kruskal–Wallis صورت گرفت. برای بررسی تفاوت بین حوزه‌ها، از مقایسه‌های چندگانه Dwass–Steel–Critchlow–Fligner استفاده شد.

۲-۳-۱- تحلیل برای پاسخ به پرسش دوم(RQ2)

برای شناسایی دشواری‌های یادگیری، از شاخص CRI (شاخص اطمینان پاسخ) استفاده شد .(Hasan et al., 1999) در هر سوال، سطح اطمینان پاسخ‌دهنده در کنار پاسخ ثبت می‌شد. بر این اساس، پاسخ‌های اشتباه با اطمینان بالا (۴ یا ۵) به‌عنوان نشانگرهای سوءبرداشت یا خطای مفهومی در نظر گرفته شدند.

برای تحلیل، دو روش به‌کار رفت:

۱ .محاسبه میانگین CRI برای هر گزینه غلط. اگر میانگین بیش از ۳ بود، نشان‌دهنده سوءبرداشت بود.

۲. شمارش تعداد پاسخ‌های اشتباه با اطمینان بالا. اگر بیش از ۱۰٪ پاسخ‌ها چنین باشند، آن گزینه به‌عنوان منبع دشواری در نظر گرفته می شد.

دامنه های حاصل از بررسی تخصصی را می توان به شرح زیر توصیف کرد:

دامنه ۱ – مبانی تعریفی: مبانی نظریه مجموعه ها، عملیات دوتایی، خاصیت شرکت پذیری(تداعی) و جابه جایی.

دامنه ۲– مفاهیم مقدماتی: عنصر همانی، عنصر معکوس و جداول کیلی.

حوزه ۳– مفاهیم میانی: گروه های دو وجهی(دی هدرال)، گروه های دوری، ایزومورفیسم ها.

مطابق با رویه های متداول در تحلیل ساختار ابزارهای ارزیابی مفهومی که دامنه هایی محتوایی گسترده و گوناگون را پوشش می دهند،عدم دستیابی به مقادیر بالای آلفای کرونباخ امری مورد انتظار است.بر این اساس و با استناد به دیدگاه Lienert و Raatz [۳۰]، مقدار آلفای کرونباخ برابر یا بالاتر از ۰/۵۵ برای ابزارهایی از این نوع،کفایت روان سنجی تلقی می شود.

از سوی دیگر بر پایه پیشنهاد بایر و فرمول اصلاحی وی برای مقیاس های با طول کوتاه $\alpha \star = \frac{n-1}{n} \times \alpha$ می توان آستانه های متناسب با طول مقیاس را محاسبه و مدنظر قرار داد. در نتیجه،در ارزیابی همسانی درونی این ابزار،باید این واقعیت لحاظ شود که وجود تنوع محتوایی و تعداد پایین گویه ها در هر زیرمقیاس،به صورت طبیعی منجر به کاهش مقادیر آلفا خواهد شد.موضوعی که در تحلیل ابزارهای مفهومی چند بعدی امری شناخته شده و قابل قبول است.

زیر دامنه های نظریه گروه و موارد مربوطه وهمچنین سازگاری درونی آنها، که توسط آلفای کرونباخ بیان شده است. و مقادیر آلفای کرونباخ تعدیل شده $\alpha\star$ همانطور که در بالا بیان شده است.

دامنه	موارد	طول	توضیحات	α^*	α
۱	۱.۲.۳.۷	۴	مبانی تعریفی	۰.۴۱	۰.۲۸
۲	۴.۵.۶.۱۰.۱۱.۱۲.۱۷.۲۰	۸	مفاهیم مبتدی	۰.۴۸	۰.۵۴
۳	۸.۹.۱۳.۱۴.۱۵.۱۶.۱۸.۱۹	۸	مفاهیم متوسط	۰.۴۸	۰.۵۰

۳-یافته‌های پژوهش

در این بخش با بررسی مقالات مختلف در این حوزه به گزارش یافته های پژوهشی می پردازیم.

۳-۱-نتایج آماری

تفاوت بین سه حوزه از نظر یادگیری نرمال‌شده، معنادار بود که با پژوهش های پیشین هم راستا بود.آزمون–Kruskal) Wallis: $H(2) = 10.6, p < 0.01$)

مقایسه‌های جفتی نشان دادند:

تفاوت بین حوزه ۱ و ۲ معنادار است($p < 0.05$)

تفاوت بین حوزه ۱ و ۳ بسیار معنادار است($p < 0.01$)

تفاوت بین حوزه ۲ و ۳ معنادار نیست($p = 0.37$)

٪۵۹ از شرکت‌کنندگان (۸۵ نفر از ۱۴۳ نفر) موفق شدند به درک مفهومی مناسب (حداقل ٪۵۰ نمره در پس‌آزمون) برسند.حتی دانشجویانی که در پیش‌آزمون نمره صفر داشتند، در پس‌آزمون پیشرفت نشان دادند .دانشجویانی که پیش‌زمینه قبلی نداشتند (نمره صفر در پیش‌آزمون) به طور متوسط $g = 0.44$ کسب کردند، درحالی‌که گروهی با نمره غیر صفر در پیش‌آزمون g 0.37 =کسب کردند. این نشان می‌دهد که یادگیری نرمال‌شده مستقل از پیش‌دانسته‌ها بوده است.

۳-۲-جمع‌بندی یافته‌های:RQ1

طرح آموزشی هیلدسهایم به طور میانگین منجر به یادگیری مفهومی مطلوب شد.

بیشترین پیشرفت در حوزه مفاهیم میانی (مانند گروه‌های چرخشی، دی هدرال و ایزومورفیسم) رخ داد.

کمترین پیشرفت در حوزه مفاهیم پایه‌ای مانند شرکت‌پذیری و جابجایی مشاهده شد.

این نتیجه نشان می‌دهد که مفاهیم پایه نیاز به تقویت بیشتر در برنامه آموزشی دارند.

۳-۳-یافته‌های مربوط به پرسش دوم :(RQ2) دشواری‌های یادگیری

برای بررسی سوءبرداشت‌ها و خطاهای رایج، پاسخ‌های نادرست با اطمینان بالا ($CRI \geq 4$) بررسی شدند. نتایج کلیدی:

از ۲۰ سؤال آزمون، ۱۶ سؤال دارای حداقل یک گزینه نادرست با میانگین اطمینان بالای ۳ بودند.

در ۱۲ سؤال، بیش از ٪۱۰ شرکت‌کنندگان یکی از گزینه‌های غلط را با اطمینان بالا انتخاب کرده بودند.

بر این اساس، سه نوع عمده از دشواری‌های یادگیری شناسایی شدند که هر یک با یکی از سه حوزه مفهومی مرتبط است:

- مشکل در تمایز بین جابه جایی و شرکت‌پذیری(Commutativity vs Associativity)

بیش از ٪۵۰ دانشجویان با اطمینان پاسخ دادند که شرکت‌پذیری به معنای بی‌تأثیر بودن ترتیب اعمال است (درواقع تعریفی اشتباه از خاصیت جابه جایی).

بسیاری از دانشجویان در تشخیص اینکه چه ویژگی‌هایی باید برای تشکیل یک گروه بررسی شوند دچار خطا بودند.

- مشکل در فهم عنصر خنثی و عنصر معکوس

در برخی موارد، دانشجویان فرض می‌کردند که ۰ یا ۱ همیشه به طور پیش‌فرض عنصر خنثی است.

در تحلیل جدول کیلی، بسیاری نتوانستند عنصر خنثی و معکوس را از یکدیگر تمایز دهند.

–دشواری در تجسم مفاهیم انتزاعی مانند ایزومورفیسم

بیش از ٪۴۰ شرکت‌کنندگان فکر کردند ایزومورف بودن دو گروه به معنای "یکسان بودن کامل آن‌ها" است.

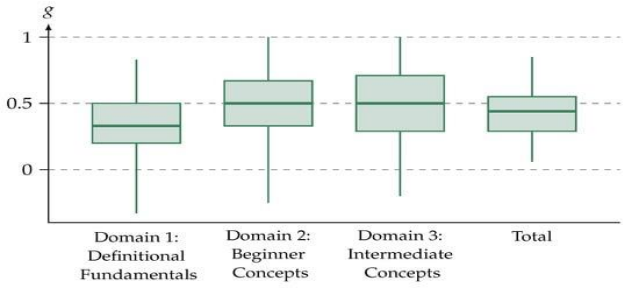
در سؤالات مربوط به تشخیص گروه تقارن اشکال، بسیاری از دانشجویان بر ظاهر شکل تمرکز کرده بودند و به ساختار جبری پشت آن توجه نکردند.

این خطاها نشان‌دهنده غلبه تفکر تصویری (Gestalt) بر درک ساختاری است.

۳-۴-جمع‌بندی یافته‌های مربوط به:RQ2

مفاهیم پایه‌ای مانند شرکت‌پذیری، عنصر خنثی و معکوس برای یادگیرندگان گیج‌کننده هستند و به راحتی با یکدیگر اشتباه گرفته می‌شوند .مفاهیم انتزاعی مثل ایزومورفیسم نیز به دلیل پیچیدگی و نیاز به درک ساختاری، چالش‌برانگیز هستند.لازم است برای ارتقای درک مفهومی، آموزش‌ها بر تمایز دقیق مفاهیم و تمرکز بر ساختارها (نه فقط ظواهر) تأکید کنند.

نمودارهای زیر به ترتیب نمودار جعبه ای از یادگیری نرمال شده برای هر یک از سه حوزه و کل سود یادگیری که در مبانی تحقیق بررسی شد و مقدار میانگین و انحراف معیار مطالب سه حوزه یادگیری.



مقادیر میانگین یادگیری نرمال شده برای هر یک از سه حوزه و همچنین کل یادگیری نرمال شده. نوارهای خطا فواصل اطمینان ۹۵٪ را نشان می دهند.

	μ	σ	آزمون رتبه علامت دار ویلکاکسون
پیش آزمون	۱.۲۸	۲.۷۴	$z\,(136) = 147.p \le 0.001.r = 0.965$
پس آزمون	۸.۹۹	۳.۵۴	$z\,(136) = 147.p \le 0.001.r = 0.965$

دامنه	یادگیری نرمال شده	μ	σ
دامنه ۱: مبانی تعریفی (به عنوان مثال، نظریه مجموعه،عملیات دوتایی،شرکت پذیری یا تداعی، جابجایی)	g_1	۰.۳۷	۰.۲۶
دامنه ۲: مفاهیم مبتدی (به عنوان مثال، عنصرهمانی ،عنصر معکوس، جداول کیلی)	g_2	۰.۴۴	۰.۲۶
حوزه ۳: مفاهیم متوسط (یعنی گروه های دو وجهی، گروه های دوری، ایزومورفیسم ها)	g_3	۰.۴۷	۰.۲۶
به طور کلی (یعنی همه دامنه ها)	g_{tot}	۰.۴۰	۰.۲۱

۴-بحث و نتیجه‌گیری

یافته‌های پژوهش که در راستای پژوهش های قبلی و با بهره از آن ها پیش رفت، نشان داده شد،که آموزش جبر مجرد در فضای دانشگاهی ایران با چالش‌های جدی مفهومی در سه حوزه اصلی مواجه است: (۱) مبانی تعریفی، (۲) مفاهیم مقدماتی و (۳) مفاهیم متوسط شامل اثبات قضایا و درک ساختارهای انتزاعی.

-بحث مربوط به پرسش اول(RQ1)

یادگیری نرمال‌شده کلی ($g = 0.40 \pm 0.21$) رضایت‌بخش ارزیابی می‌شود و با مطالعات مشابه قابل مقایسه است.

پیشرفت یادگیری در همه شرکت‌کنندگان مشاهده شد.حتی کسانی که در پیش‌آزمون نمره صفر داشتند.

۵۹٪ شرکت‌کنندگان به درک مفهومی مناسب (یعنی کسب حداقل ۵۰٪ نمره پس‌آزمون) رسیدند.

بیشترین پیشرفت مربوط به حوزه مفاهیم میانی بود (گروه‌های دوری، دی هدرال و ایزومورفیسم).

کمترین پیشرفت مربوط به مفاهیم پایه‌ای (مثل شرکت‌پذیری و جابجایی) بود.

طراحی آموزشی هیلدسهایم در انتقال مفاهیم پیشرفته مؤثر است، ولی برای تقویت یادگیری مفاهیم بنیادی نیاز به بازنگری دارد. این بینش به ما کمک می‌کند تا مسیر آموزشی بهتری برای دانشجومعلمان طراحی کنیم.

-بحث مربوط به پرسش دوم :(RQ2)

با توجه به تجزیه‌وتحلیل پاسخ‌های همراه با اطمینان بالا ولی اشتباه، سه نوع رایج از خطاها یا سوءبرداشت‌های مفهومی شناسایی شد:

الف) اشتباه گرفتن شرکت‌پذیری و جابجایی

بسیاری از دانشجویان فکر می‌کردند که خاصیت شرکت‌پذیری به این معناست که (ترتیب انجام عملیات مهم نیست) که درواقع تعریف جابجایی است .برخی دیگر، شرکت‌پذیری را به‌طور کامل بررسی نکرده بودند و گمان می‌کردند که اگر ترکیب اعداد (معمولی) به نظر برسد، پس آن مجموعه گروه است.

ب) درک ناقص از عنصر خنثی و معکوس

سال هشتم، شماره ۵ (پیاپی: ۳۷)، زمستان ۱۴۰۴
فصلنامه مطالعات کاربردی در علوم اجتماعی و جامعه شناسی
ISSN: 2645-4475

بعضی از دانشجویان به‌صورت پیش‌فرض تصور می‌کردند که ۰یا ۱ همیشه عنصر خنثی است.

در جدول‌های کیلی، تفاوت میان عنصر خنثی و معکوس برای برخی نامشخص بود.

ج) دشواری در درک مفاهیم انتزاعی مانند ایزومورفیسم

بسیاری از شرکت‌کنندگان فکر می‌کردند که دو گروه ایزومورف باید دقیقاً یکسان باشند یا جدول کیلی آن‌ها کاملاً برابر باشد . هنگام تحلیل اشکال هندسی، افراد بیشتر به ظاهر (مثلاً مثلث بودن) توجه می‌کردند تا ساختار تقارن آن‌ها.

بر اساس مدل دوگانه‌ی وفاداری تصویری (Gestalt)و وفاداری عملکردی(Functional Fidelity) ، بسیاری از خطاها ناشی از تمرکز بیش از حد روی ظاهر اشیاء و کم‌توجهی به ساختار جبری پشت آن‌ها بوده است. این مفهوم پیش‌تر در آموزش فیزیک مطرح شده بود، اما به نظر می‌رسد برای آموزش ریاضی نیز کاربردپذیر باشد.

-محدودیت‌های مطالعه

نبود گروه کنترل: به دلیل نبود طرح‌های آموزشی قابل مقایسه، نتوانسته‌اند طرح هیلدسهایم را مستقیماً با طرحی دیگر مقایسه کنند.

برخی گزینه‌های نادرست در آزمون، ممکن است ابهام زبانی داشته باشند که می‌تواند باعث خطای برداشت پاسخ‌دهنده شود. این موارد باید در مطالعات آینده اصلاح شوند.

در این مقاله نشان داده شد که ابزار مفهومیCI2GT و طرح آموزشی هیلدسهایم می‌توانند به شکل مؤثری برای:

سنجش درک مفهومی دانشجویان در نظریه گروه،تحلیل پیشرفت یادگیری در زیرحوزه‌های مختلف و شناسایی خطاها و سوءبرداشت‌ها مورد استفاده قرار گیرند.

طرح هیلدسهایم در انتقال مفاهیم پیشرفته موفق بود، ولی برای مفاهیم ابتدایی نیاز به تقویت دارد.

ابزار CI2GT با استفاده از شاخص اطمینان (CRI) توانست به‌خوبی اشتباهات مفهومی را آشکار کند.

سؤالات پیشنهادی برای پژوهش‌های آینده:

۱ .آیا بازنویسی گزینه‌های مبهم در سوالات باعث کاهش خطاهای مفهومی می‌شود؟

۲ .سوءبرداشت‌های شناسایی‌شده تا چه حد در یادگیری آینده اختلال ایجاد می‌کنند؟

۳ .آیا همین دشواری‌ها را می‌توان در مطالعات کیفی با مصاحبه‌های فردی نیز تأیید کرد؟

۴. آیا مدل دوگانه وفاداری تصویری و عملکردی می‌تواند به‌طور تجربی در آموزش ریاضی تأیید شود؟

این مطالعه نشان می‌دهد که اگرچه مشکلات مفهومی در آموزش جبر مجرد عمیق و پیچیده هستند، اما با طراحی دقیق، بازخورد مستمر و بهره گیری از چارچوب‌های شناختی و تجسمی، می‌توان مسیر یادگیری را برای دانشجویان روشن‌تر و معنادارتر ساخت. این نتایج می‌تواند مبنای بازطراحی برنامه درسی در دروس جبر در دانشگاه‌ها قرار گیرد و همچنین در تربیت معلمان آینده نگر در ریاضیات محض به ویژه نظریه گروه ها، نقش مؤثر ایفا کند.

منابع

- حیدری فاطمه الزهرا، اصغری نسیم، دلاور علی,۱۴۰۲، تحلیل محتوای کتاب درسی ریاضی پایه هفتم، از منظر فرآیند ساخت مفهوم متغیر و عبارت های جبری, دوره ۱۴, ص ۷۹
- Wasserman, H.H. Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers, 1st ed.; Springer: Basel, Switzerland, 2018. [Google Scholar]
- Melhuish, K. The Design and Validation of a Group Theory Concept Inventory. Ph.D. Thesis, Portland State University, Portland, OR, USA, 2015. [Google Scholar]
- Melhuish, K.; Fagan, J. Connecting the Group Theory Concept Assessment to Core Concepts at the Secondary Level. In Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers; Springer: Basel, Switzerland, 2018; pp. 19–45. [Google Scholar]
- Melhuish, K. The Group Theory Concept Assessment: A Tool for Measuring Conceptual Understanding in Introductory Group Theory. Int. J. Res. Undergrad. Math. Educ. 2019, 5, 359–393. [Google Scholar] [CrossRef]
- Veith, J.M.; Bitzenbauer, P. What Group Theory Can Do for You: From Magmas to Abstract Thinking in School Mathematics. Mathematics 2022, 10, 703. [Google Scholar] [CrossRef]
- Larsen, S. Struggling to Disentangle the Associative and Commutative Properties. Learn. Math. 2010, 30, 37–42. [Google Scholar]
- Zaslavsky, O.; Peled, I. Inhibiting Factors in Generating Examples by Mathematics Teachers and Student Teachers: The Case of Binary Operation. J. Res. Math. Educ. 1996, 27, 67–78. [Google Scholar] [CrossRef]