ISSN: 2645-4408
پژوهش در حسابداری و علوم اقتصادی
فصلنامه پژوهش در حسابداری و علوم اقتصادی
سال نهم، شماره ۴ (پیاپی ۳۶)، زمستان ۱۴۰۴

مقایسه تجربی دقت قیمت گذاری اختیارمعامله: مدل هستون ناندی در مقابل مدل نوسان‌پذیری تصادفی مبتنی بر گشتاورهای بالا

سپیده خلفی[1*]، علیرضا بهمنی نژاد[2]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۲۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۰۱
کد مقاله: ۷۹۰۵۳

چکـیده

در این پژوهش به مقایسه تجربی دو رویکرد قیمت‌گذاری اختیار معامله، یعنی مدل نوسان‌پذیری تصادفی هستون–ناندی (HN) و مدل نوسان‌پذیری تصادفی مبتنی بر گشتاورهای مرتبه بالا (MSV)، بر روی قراردادهای اختیار معامله صندوق «اهرم» پرداختیم. با توجه به محدودیت‌های مدل‌های کلاسیک در تبیین لبخند نوسان‌پذیری، این مطالعه با استفاده از ۸۸۴۰ مشاهده در بازه زمانی ۸۰۱ روز معاملاتی، عملکرد این دو مدل را در چهار حوزه پایداری پارامتری، برازش درون‌نمونه، توان پیش‌بینی برون‌نمونه و کارایی پوشش ریسک پویا مورد ارزیابی قرار داده است. مدل‌ها به صورت روزانه از طریق حداقل‌سازی جذر میانگین مربعات خطای نوسان ضمنی (IV RMSE) کالیبره شدند. یافته‌های پژوهش نشان داد که مدل MSV به واسطه پارامترسازی گشتاورهای مرتبه بالا، با کاهش ۷۸٪ خطای درون‌نمونه نسبت به مدل HN توانایی بسیار بالاتری در قیمت‌گذاری ویژگی‌های آماری بازار ایران دارد. همچنین، نتایج آزمون دایبولد–ماریانو برتری معنادار آماری مدل MSV را در تمامی افق‌های پیش‌بینی ۱، ۵ و ۲۰ روزه تایید کرد. در نهایت، شبیه‌سازی استراتژی پوشش ریسک دلتا–خنثی نشان داد که مدل MSV با خطای کمتر و سوگیری ناچیز، ابزاری کارآمدتر برای مدیریت ریسک در زنجیره قراردادهای اختیار معامله نماد اهرم محسوب می‌شود.

واژگـان کلـیدی: مدل هستون–ناندی، مدل MSV، دقت قیمت‌گذاری اختیار معامله، پوشش ریسک پویا، منحنی نوسان‌پذیری

۱– استادیار، دانشکده مالی و حسابداری، موسسه آموزش عالی الکترونیکی ایرانیان، تهران، ایران (نویسنده مسئول)
sepideh.khalafi@iranian.ac.ir
۲– دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مالی و مدیریت ریسک، دانشکده مالی و حسابداری، موسسه آموزش عالی الکترونیکی ایرانیان، تهران، ایران

۱- مقدمه

قراردادهای اختیار معامله[1] برای اولین بار در سال ۱۹۷۳ در بورس اختیار معامله شیکاگو[2] معامله شدند. از آن زمان، مدل بلک–شولز[3] (۱۹۷۳) تبدیل به پرکاربردترین فرمول ریاضی برای قیمت گذاری اختیار معامله‌های اروپایی[4] شد. از جمله فروض اساسی این مدل این است که قیمت دارایی پایه از یک حرکت بروانی هندسی[5] با نوسان‌پذیری ثابت[6] پیروی می‌کند و بازده مرکب دارایی پایه[7] دارای توزیع نرمال است (بلک و شولز، ۱۹۷۳)[8]. با وجود آنکه مدل بلک–شولز پایه‌گذار بسیاری از مدلهای قیمت گذاری قراردادهای اختیار معامله بوده است، این مدل دارای محدودیت‌هایی نیز هست. از جمله محدودیت‌های اصلی مدل بلک–شولز، فرض نوسان‌پذیری ثابت قیمت دارایی پایه است (ژانکوا، ۲۰۱۸)[9]. به سطحی از نوسان‌پذیری که منجر می‌شود قیمت برآورد شده مدل بلک–شولز با قیمت معامله شده اختیار معامله در بازار یکسان شود، نوسان‌پذیری ضمنی[10] می‌گویند. مطالعات نشان می‌دهد سطح نوسان‌پذیری ضمنی یک اختیار در قیمت‌های اعمال[11] متفاوت یکسان نیست و برای سهام شکلی شبیه به حرف انگلیسی U دارد؛ پدیده ای که از آن با عنوان لبخند نوسان‌پذیری[12] یاد می‌شود (موور، ۲۰۲۵)[13]. برخلاف فرضیات مدل بلک–شولز، الگوی U شکل نوسان‌پذیری ضمنی در قیمت‌های اعمال مختلف، بیشتر نشان‌دهنده یک توزیع بی‌تفاوت نسبت به ریسک[14] است که کشیدگی بیشتری نسبت به توزیع لگ‌نرمال دارد (بیتس و تیپی، ۲۰۲۲)[15].

با هدف فهم بهتر سطح نوسان‌پذیری ضمنی[16]، همزمان مدلهای نوسان‌پذیری تصادفی[17] زمان پیوسته[18] مانند مدل هستون (۱۹۹۳)[19] و مدلهای زمان گسسته[20] خودرگرسیون ناهم‌واریانسی شرطی[21] (ARCH) و مدل تعمیم یافته آن (GARCH)[22] مانند مدل هستون–ناندی (۲۰۰۰)[23] توسعه یافتند. نتایج تحقیقاتی که در بورس اوراق بهادار تهران و بر روی اوراق اختیار سهام ایران‌خودرو انجام گرفته است، نشان می‌دهد قیمت گذاری مدل هستون–ناندی نسبت به مدل بلک–شولز در همه حالات کوتاه مدت، میان‌مدت و بلندمدت دقیق‌تر است (حدادی و نصراللهی، ۱۴۰۲). علاوه بر این، مدلهای دیگری نیز با تمرکز بر اصلاح یکی دیگر از فروض مدل بلک–شولز یعنی، توزیع نرمال بازدهی دارایی پایه، گسترش یافتند. این دسته دوم از مدل‌های قیمت گذاری اوراق اختیار، که به طور کلی میتوان از آنها با عنوان مدل‌های گشتاور بالا[24] یاد کرد، بر خلاف مدل‌های نوسان‌پذیری تصادفی به جای آنکه با استفاده از نوسان‌پذیری شکل لبخند را به طور ضمنی ایجاد کنند، گشتاورهای بالا را به گونه ای تخمین می‌زنند که شکل لبخند ایجاد گردد. یکی از متداول‌ترین روش‌ها در این نوع مدل‌ها، جایگزینی کامل توزیع لگ‌نرمال با توزیع تعمیم یافته تی–استیودنت[25] است (لیم و همکاران، ۲۰۰۵)[26]. برای نمونه، دیت و ایسلیاو (۲۰۱۴)[27] نمونه‌ای از مدل گشتاور بالا توسعه دادند که از منظر محاسبات کامپیوتری وکالیبره شدن، بسیار سریع تر از مدل‌های نوسان‌پذیری تصادفی مانند هستون–ناندی (HN) است.

1 Options Contracts
2 Chicago Board Options Exchange (CBOE)
3 Black-Scholes (1973)
4 European Options
5 Geometric Brownian Motion
6 Constant Volatility
7 Underlying Asset
8 (Black & Scholes, 1973)
9 (Janková, 2018)
10 Implied Volatility
11 Strike Price
12 Volatility Smile
13 (Moore, 2025)
14 Risk-neutral
15 (Bates & Tippie, 2022)
16 IV Surface
17 Stochastic Volatility
18 Continuous-Time
19 Heston (1993)
20 Discrete-Time
21 Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
22 Generalized ARCH
23 Heston & Nandi (2000)
24 High Order Moment Models
25 Generalized Student t-distribution (GST)
26 (Lim et. Al, 2005)
27 (Date & Islyaev, 2014)

مطالعات اخیر در بورس اوراق بهادار تهران نشان می‌دهد خطای قیمت گذاری تئوریک مدل بلک–شولز، در برخی موارد با قیمت واقعی بازار اوراق اختیار اختلاف ۵۵ درصدی دارد (نانواساوجبلغی و همکاران، ۱۴۰۳)؛ که نشان دهنده نیاز جدی به مدل‌های قیمت گذاری پیشرفته تر است. تلاش برای تست مدل‌های پیشرفته در بورس تهران در هردو نوع مدل نوسان‌پذیری ضمنی (GARCH) و مدل‌های مبتنی بر گشتاور بالا صورت گرفته است. مطالعه حدادی و نصراالهی (۱۴۰۲) با مقایسه مدل‌های بلک–شولز، هستون و HN نشان داد مدل HN کمترین خطای قیمت گذاری در اوراق اختیار سهام ایران‌خودرو را دارد. نتایج این مطالعه با یافته های پیشین مبنی بر اینکه مدل‌های نوع هستون در بازارهای آسیایی از کارایی بالایی برخوردارند مطابقت دارد (محمودیان و همکاران، ۱۴۰۴). در مطالعه‌ای دیگر، نصراللهی و حدادی (۱۴۰۴) با مقایسه مدل‌های پرش مرکب[۱] مرتون (۱۹۷۶)[۲]، کو (۲۰۰۲)[۳]و گرام–چارلیه[۴] (چاتیو و دوفرسن، ۲۰۱۷)[۵]، نشان دادند برای دارایی های پایه‌ای مانند نماد شستا که چولگی منفی و کشیدگی بیش‌ازحد دارند، مدل گرام–چارلیه که این گشتاورها را صریحا لحاظ می‌کند، مدل قیمت گذاری دقیق‌تری است.

با وجود نتایج ارزشمند این تحقیقات، یک شکاف تحقیقاتی در خصوص مقایسه بین مدل‌های نوسان‌پذیری ضمنی و مدل‌های مبتنی بر گشتاور بالا در بورس تهران وجود دارد. هدف اصلی این پژوهش، ارایه یک مقایسه چندوجهی بین دو مدل از این خطوط فکری، یعنی مدل HN و مدل نوسان‌پذیری ضمنی مبتنی بر گشتاور بالا[۶] (MSV) است؛ در بخش روش‌تحقیق توضیح دادیم که چرا مدل MSV، بر خلاف عنوانش، متعلق به خانواده مدل‌های گشتاور بالا است. در این پژوهش، از مقایسه مجموع مربعات خطای قیمت‌گذاری فراتر رفتیم و این دو مدل را از ۵ منظر اقتصادی بررسی کردیم:

- برازش درون‌نمونه[۷] (IS): سنجش میزان انعطاف‌پذیری مقطعی هر مدل.
- پیش‌بینی برون‌نمونه[۸] (OOS): ارزیابی قدرت پیش‌بینی یک‌روزه هر مدل.
- بررسی خطای قیمت‌گذاری: تحلیل خطاهای قیمت‌گذاری در سراسر طیف اعمال های درسود[۹]، بی‌تفاوت[۱۰]، درزیان[۱۱] و سررسید اختیار معامله برای ارزیابی اینکه هر مدل چگونه لبخند نوسان‌پذیری را ثبت می‌کند.
- معناداری آماری: با استفاده از آزمون‌های استاندارد دقت پیش‌بینی مانند آزمون دایبولد–ماریانو[۱۲]، مطمئن شدیم هرگونه اختلاف در پیش‌بینی برون نمونه از منظر آماری قابل اطمینان است.
- عملکرد پوشش‌ریسک[۱۳] پویا: شبیه‌سازی استراتژی‌های دلتا–هجینگ[۱۴] روزانه برای آزمودن نحوه‌ی توصیف پویایی‌های دارایی پایه توسط مدل‌ها.

این رویکرد جامع توانست نشان دهد در محیط پویای این بازار غیرنرمال، کدام مدل واقعا بر دیگری برتری دارد. در این پژوهش فرضیات زیر را مورد بررسی قرار دادیم:

- فرضیه اول: مدل MSV بدلیل پارامترسازی گشتاور بالا، در برازش درون‌نمونه عملکرد بهتری از مدل HN دارد.
- فرضیه دوم: با توجه به اینکه مدل HN یک مدل پویا است، در تمام آزمون های پویا مانند پیش‌بینی برون نمونه، دلتا–هجینگ و ثبات پارامترها نسبت به مدل MSV برتری دارد.

در بخش دوم این مقاله به بررسی پیشینه تحقیق می‌پردازیم. در بخش سوم، جزئیات هردو مدل را توضیح می‌دهیم و فرضیات مقاله را آزمون می‌کنیم. در بخش چهارم، نتایج بدست آمده از این تحقیق ارایه می‌شوند.

1 Jump-Diffusion
2 Merton (1976)
3 Kou (2002)
4 Gram-Charlier
5 (Chateau & Dufresne, 2017)
6 High Order Moments based Stochastic Volatility (MSV)
7 In-sample
8 Out-of-Sample
9 ITM
10 ATM
11 OTM
12 Diebold-Mariano test
13 Hedging
14 Delta-Hedging

۲- پیشینه پژوهش

تا قبل از سقوط بازارهای سهام در سال ۱۹۸۷، نوسان‌پذیری ضمنی در قیمت‌های اعمال مختلف نسبتا افقی و ثابت بود. بعد از سقوط قیمت سهام در سال ۱۹۸۷، تقاضای پوشش ریسک‌های نزولی قیمت، منجر به افزایش نسبی قیمت اختیار فروش‌های در زیان[۱] شد و به تبع آن لبخند نوسان‌پذیری، یا چولگی نوسان‌پذیری[۲] مشاهده گردید (موور، ۲۰۲۵). در قیمت‌های اعمال بالاتر از قیمت دارایی پایه نیز، نوسان‌پذیری ضمنی بالاتر اختیار خریدهای در زیان[۳] بدلیل تقاضای لاتاری[۴] ایجاد می‌گردد. برخلاف فرض اولیه فرمول بلک–شولز که نوسان‌پذیری تمام قیمت‌های اعمال در طول عمر قرارداد را ثابت فرض می‌کند، شکل‌گیری این انحراف نوسان‌پذیری نشان می‌دهد که مدل بلک–شولز در قیمت‌گذاری قراردادهای اختیارمعامله دارای محدودیت‌های جدی است (بیتس و تیپی، ۲۰۲۲).

ساختار لبخند ناشی از آن است که بازار احتمال بیشتری از آنچه یک توزیع نرمال پیش‌بینی می‌کند برای بازدهی‌های بشدت منفی (سقوط قیمت سهام) لحاظ می‌کند. درواقع شیب منفی نشان‌دهنده چولگی[۵] منفی توزیع بازدهی داریی‌پایه و خمیدگی منحنی لبخند نیز نشان‌دهنده کشیدگی[۶] دم[۷] ها است (لیم و همکاران، ۲۰۰۵). مدل‌های مبتنی بر نوسان‌پذیری تصادفی به منظور رفع محدودیت‌های مدل بلک–شولز و توضیح بهتر منحنی نوسان‌پذیری ضمنی گسترش یافتند. در این زمینه میتوان به تحقیقات اولیه این حوزه توسط هال و وایت (۱۹۸۷)[۸] و مدل هستون (۱۹۹۳) اشاره کرد. مدل هستون (۱۹۹۳) که می‌توان از آن به عنوان شاخص مدل‌های زمان پیوسته نام برد، توانست با در نظر گرفتن همبستگی میان شوک‌های قیمت و نوسان‌پذیری، و با معرفی تاثیر منفی اهرم[۹]، چولگی مشاهده شده در بازار را توضیح دهد (نصراللهی و حدادی، ۱۴۰۴)، (لیم و همکاران، ۲۰۰۵).

با اینحال، به کارگیری عملی مدل‌های زمان پیوسته با چالش همراه بوده است: این مدل‌ها نوسان‌پذیری را یک متغیر پنهان[۱۰] در نظر می‌گیرند که مستقیما در بازار قابل مشاهده نیست و باید از روش‌های پیچیده از بازار استخراج شود. برای حل این مشکل و استفاده از داده‌های گسسته و قابل مشاهده بازار (مانند بازده‌های روزانه)، پژوهش‌ها به سمت مدل‌های ناهم‌واریانسی شرطی (ARCH/GARCH) رفت. برای نمونه مدل دوان (۱۹۹۵)[۱۱] با توسعه یک چارچوب نظری برای قیمت‌گذاری اختیار معامله در محیط GARCH، نشان داد که چگونه می‌توان مدل‌های اقتصادسنجی سری زمانی را با قیمت‌گذاری ریسک–خنثی پیوند زد. با اینحال اکثر مدل‌های اولیه قیمت‌گذاری GARCH فاقد یک راه حل تحلیلی بودند و برای قیمت‌گذاری نیاز به شبیه‌سازی‌های زمان‌بر مونت‌کارلو[۱۲] داشتند. مدل هستون–ناندی (۲۰۰۰) با ارائه یک راه‌حل فرم بسته[۱۳] تحت فرایند GARCH(1,1) این مانع محاسباتی را برطرف کرد. ویژگی متمایز مدل HN این است که ضمن حفظ سهولت اجرا (به دلیل استفاده از نوسان‌پذیری قابل مشاهده[۱۴])، به گونه‌ای طراحی شده است که با کوچک شدن بازه‌های زمانی، به مدل زمان پیوسته هستون (۱۹۹۳) میل می‌کند. کارایی تجربی این مدل در بازار سرمایه ایران نیز مورد تأیید قرار گرفته است. یافته‌های پژوهش حدادی و نصراللهی (۱۴۰۲) بر روی اختیار معامله‌های سهام ایران‌خودرو نشان می‌دهد که ساختار گسسته و پویای مدل HN، توانایی بیشتری در توضیح الگوهای غیرنرمال مانند چولگی و کشیدگی مشاهده شده در بازار بورس تهران دارد.

در حالی که مدل‌های نوسان‌پذیری تصادفی تلاش می‌کنند تا با پویا کردن واریانس مشکل لبخند نوسان‌پذیری را حل کنند، به موازات، مدل‌های مبتنی بر گشتاور بالا سعی دارند به جای تولید ضمنی[۱۵] لبخند نوسان‌پذیری، گشتاورهای سوم (چولگی) و چهارم (کشیدگی) را به طور صریح[۱۶] در فرمول قیمت‌گذاری وارد کنند. از پیشگامان این رویکرد می‌توان به جارو و راد (۱۹۸۲)[۱۷] و کواردو و سو (۱۹۹۶)[۱۸] اشاره کرد که با استفاده از بسطهای اجورث[۱] و گرام–چارلیه تابع چگالی احتمال نرمال را تعدیل کردند تا با

---

1 OTM Puts
2 Volatility Skew
3 OTM Calls
4 Lottery demand
5 Skewness
6 Kurtosis
7 Fat Tails
8 Hull & White (1987)
9 Negative Leverage Effect
10 Latent Variable
11 Duan (1995)
12 Monte Carlo
13 Closed-Form Solution
14 Observable Variable
15 Implicitly
16 Explicitly
17 Jarrow & Rud (1982)
18 Corrado & Su (1996)

داده‌های مشاهده شده در بازار (مانند دم‌های پهن) تطبیق یابد. مدل نوسان‌پذیری تصادفی مبتنی بر گشتاورهای بالا MSV که در این پژوهش به عنوان رقیب مدل HN بررسی می‌شود، از نظر فلسفی به این خانواده تعلق دارد. اگرچه نام این مدل به نوسان‌پذیری تصادفی اشاره دارد، اما مکانیسم قیمت‌گذاری آن بر پایه یک بسط تیلور[2] مرتبه چهارم بنا شده است که در آن قیمت اختیار معامله به صورت تابعی صریح از گشتاورهای نوسان‌پذیری تقریب زده می‌شود. این ساختار به مدل اجازه می‌دهد تا بدون نیاز به حل‌های عددی پیچیده یا شبیه‌سازی مونته کارلو، اثرات گشتاورهای بالاتر را در قیمت لحاظ کند. ضرورت توجه به این رویکرد در بازار ایران نیز اثبات شده است. پژوهش اخیر نصرالهی و حدادی (۲۰۲۵) نشان داد که در نمادهایی مانند «شستا» که رفتار قیمت به شدت از حالت نرمال فاصله دارد (چولگی منفی و کشیدگی زیاد)، مدل‌هایی که این گشتاورها را صریحاً در نظر می‌گیرند (مانند گرام–چارلیه)، دقیق‌تر عمل می‌کنند. بنابراین، قرار دادن مدل MSV به عنوان یک مدل صریح در برابر مدل HN به عنوان یک مدل ضمنی، یک مقایسه اقتصادی میان دو فلسفه متفاوت قیمت‌گذاری در بورس تهران خواهد بود.

علاوه بر این اگرچه کاهش خطای قیمت‌گذاری، شرط لازم برای کارایی یک مدل است، شرط کافی نیست. براساس معمای قیمت‌گذاری–پوشش ریسک[3] مدلی که دقیق‌ترین قیمت‌ها را در یک مقطع زمانی تولید می‌کند (برازش عالی)، لزوماً بهترین عملکرد را در مدیریت ریسک و پوشش نوسانات در طول زمان ندارد. ریشه این تضاد در تمایز میان برازش ایستا[4] و سازگاری پویا[5] نهفته است. دوماس و همکاران (۱۹۹۸)[6] نشان دادند مدل‌هایی که صرفاً برای برازش منحنی لبخند نوسان‌پذیری طراحی شده‌اند، اغلب دچار مشکل بیش‌برازش[7] می‌شوند. پارامترهای این مدل‌ها برای تطبیق با قیمت‌های روز صفر به شدت دستکاری می‌شوند، اما این پارامترها در طول زمان ناپایدارند و منجر به نسبت‌های پوشش ریسک (دلتا[8]) نادرست می‌شوند. در مطالعه‌ای دیگر باکشی و همکاران (۱۹۹۷)[9] نشان دادند که اگرچه افزودن ویژگی‌های پیچیده (مانند پرش[10] و نوسان‌پذیری تصادفی) خطای قیمت‌گذاری را کاهش می‌دهد، اما این بهبود همیشه به عملکرد بهتر در پوشش ریسک منجر نمی‌شود. لسانس و ورینس (۲۰۱۸)[11] با پژوهشی که بر روی اوراق اختیارمعامله شاخص سهام اس‌اندپی[12] آمریکا آنجام دادند، نشان دادند که یک ناهمخوانی آشکار بین رتبه‌بندی مدل‌ها بر اساس معیار قیمت‌گذاری و معیار پوشش ریسک وجود دارد.

این ادبیات مبنای نظری روش‌شناسی چندبعدی این پژوهش را تشکیل می‌دهد. از آنجا که مدل MSV به عنوان یک مدل گشتاور بالا و مدل HN به عنوان یک مدل پویا دارای ساختارهای ریاضی کاملاً متفاوتی هستند، اکتفا به مقایسه خطای قیمت‌گذاری می‌تواند گمراه‌کننده باشد. بنابراین، این پژوهش با آزمون همزمان «دقت قیمت‌گذاری» و «کارایی پوشش ریسک»، به دنبال تشخیص این نکته است که آیا برتری احتمالی هر مدل ناشی از توصیف صحیح پویایی بازار است یا صرفاً حاصل یک برازش ریاضی منعطف می‌باشد.

۳- روش‌شناسی پژوهش

در این بخش، چارچوب ریاضیاتی مدل‌های مورد استفاده برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله تشریح می‌شود. همان‌طور که در ادبیات پژوهش بیان شد، این مطالعه به مقایسه دو رویکرد متفاوت می‌پردازد:

رویکرد «پویا و ضمنی» که توسط مدل HN نمایندگی شد.

رویکرد «ایستا و صریح» که توسط مدل MSV نمایندگی شد.

۱،۳- مدل ناهم‌واریانسی شرطی هستون–ناندی (Heston-Nandi GARCH)

مدل هستون–ناندی (۲۰۰۰) یک مدل زمان گسسته برای قیمت‌گذاری اختیارمعامله است که فرض می‌کند واریانس دارایی پایه از یک فرایند GARCH پیروی می‌کند. مزیت اصلی این مدل نسبت به سایر مدل‌های تصادفی، ارائه یک فرم بسته برای قیمت‌گذاری است که نیاز به شبیه‌سازی‌های زمان‌بر را از بین می‌برد. در این مدل، فرض می

1 Edgeworth Expansion
2 Taylor Expansion
3 Pricing-Hedging Conundrum
4 Static Fit
5 Dynamic Consistency
6 (Dumas et. Al, 1998)
7 Over-fitting
8 Delta
9 (Bakshi et. Al, 1997)
10 Jump
11 (Lassance & Vrins, 2018)
12 S&P500

شود که قیمت دارایی پایه S_t در هر دوره زمانی $\Delta = 1$ (یک روز)، تحت اندازه احتمال ریسک-خنثی Q از فرایند زیر پیروی می‌کند:

$$ln(S_{t+1}) = ln(S_t) + r - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}z^*_{t+1} \quad (1)$$

که در آن r نرخ بهره بدون ریسک روزانه و z^*_{t+1} یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد تحت اندازه Q است. ویژگی اصلی این مدل، پویایی واریانس شرطی h_{t+1} است که به صورت فرایند GARCH(1,1) زیر مدل‌سازی می‌شود:

$$h_{t+1} = w + \beta h_t + \alpha\left(z^*_t - \gamma\sqrt{h_t}\right)^2 \quad (2)$$

پارامترهای مدل عبارت‌اند از:

w پارامتر عرض از مبدأ که با واریانس بلندمدت مرتبط است.

β پارامتر اتورگرسیو که میزان ماندگاری[1] نوسانات را نشان می‌دهد.

α پارامتر واکنش که حساسیت واریانس به شوک‌های بازار را تعیین می‌کند.

γ پارامتر عدم تقارن یا اثر اهرمی. این پارامتر حیاتی‌ترین بخش مدل برای تولید لبخند نوسان‌پذیری است. مثبت بودن γ باعث می شود که شوک‌های منفی بازده $(z^*_t > 0)$ تأثیر بیشتری بر افزایش واریانس آتی نسبت به شوک‌های مثبت داشته باشند، که منجر به ایجاد چولگی منفی در توزیع بازده می‌شود.

قیمت یک اختیار خرید اروپایی با قیمت اعمال K و سررسید T در زمان t ، مشابه فرمول بلک-شولز اما با استفاده از احتمالات تعدیل شده P_1 و P_2 محاسبه می‌شود:

$$C_t = S_t P_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2 \quad (3)$$

این احتمالات با استفاده از تابع مشخصه[2] بازده دارایی و از طریق تبدیل فوریه[3] محاسبه می‌شود. از آنجا که تشریح کامل فرآیند استخراج تابع مشخصه و حل انتگرال‌های فوریه نیازمند مباحث ریاضی طولانی است، برای مطالعه جزئیات دقیق و اثبات روابط می‌توان به مقاله اصلی هستون و ناندی (۲۰۰۰) مراجعه کرد.

۲,۳- مدل نوسان‌پذیری تصادفی مبتنی بر گشتاورهای بالا (MSV)

مدل MSV که توسط دیت و ایسلیاو (۲۰۱۴) توسعه داده شد، رویکردی متفاوت نسبت به مدل‌های کلاسیک نوسان‌پذیری تصادفی دارد. در حالی که مدل‌هایی مانند هستون (۱۹۹۳) و هستون-ناندی (۲۰۰۰) نوسان‌پذیری را به عنوان یک فرایند پویا و وابسته به مسیر در نظر می‌گیرند، مدل MSV نوسان‌پذیری را ترکیبی از یک ساختار قطعی و یک متغیر تصادفی ایستا فرض می‌کند. در این مدل، فرآیند قیمت دارایی از یک مدل هال-وایت تعمیم‌یافته پیروی می‌کند:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_t \quad (4)$$

نکته متمایز این مدل در تعریف واریانس لحظه‌ای v_t است. واریانس به صورت حاصل‌ضرب یک متغیر تصادفی اسکالر[4] (ζ) و یک تابع قطعی از زمان $D(t)$ تعریف می‌شود:

$$v_t = \zeta . D(t) \quad (5)$$

که در آن $D(t)$ ساختار زمانی نوسان‌پذیری را نشان می‌دهد و ζ یک متغیر تصادفی لگ‌نرمال با میانگین ۱ و واریانس k^2 است. پارامتر k^2 در اینجا نقش کلیدی را ایفا می‌کند و نماینده «نوسانِ نوسان‌پذیری» است. برخلاف مدل HN که قیمت را از طریق حل عددی انتگرال‌های پیچیده بدست می‌آورد، مدل MSV قیمت اختیار معامله (C_{MSV}) را با استفاده از بسط تیلور مرتبه چهارم قیمت بلک-شولز (C_{BS}) حول میانگین واریانس تقریب می‌زند:

$$C_{MSV} \approx C_{BS}(\overline{V}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial V^2}E + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_{BS}}{\partial V^3}E + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 C_{BS}}{\partial V^4}E \quad (6)$$

در این رابطه، جملات E گشتاورهای مرکزی واریانس هستند که مستقیماً تابعی از پارامتر k می‌باشند. بدین ترتیب، مدل MSV با تنظیم پارامتر k اثرات گشتاورهای بالاتر (چولگی و کشیدگی) را مستقیماً و به صورت صریح در قیمت‌گذاری لحاظ می‌کند. این ویژگی باعث می‌شود کالیبره کردن این مدل بسیار سریع‌تر از مدل‌های پویا باشد، زیرا به جای حل معادلات دیفرانسیل، از یک فرمول جبری صریح استفاده می‌کند.

1 Persistence
2 Characteristic Function
3 Fourier Transformation
4 Scalar Random Variable

۳،۳- روش کالیبره‌سازی و تابع زیان

هدف از کالیبره‌سازی، یافتن مجموعه‌ای از پارامترهای مدل (θ) است که اختلاف میان قیمت‌های مشاهده شده در بازار و قیمت‌های تئوریک برآورد شده توسط مدل را کمینه سازد. در این پژوهش، فرآیند کالیبره‌سازی به صورت روزانه انجام گردید تا پویایی پارامترها در طول زمان قابل بررسی باشد.

انتخاب تابع زیان[1] تأثیر عمیقی بر پارامترهای تخمین زده شده و قضاوت نهایی در مورد عملکرد مدل دارد. در ادبیات سنتی، اغلب از «جذر میانگین مربعات خطای قیمت[2]» استفاده می‌شد. با این حال، این معیار دارای یک نقص عمده است: وزن‌دهی نامتوازن قیمت‌های اعمال متفاوت. از آنجا که قیمت اختیار معامله‌های ITM بسیار بالاتر از اختیار معامله‌های OTM است، تابع زیان مبتنی بر قیمت، تمرکز بهینه‌سازی را بر روی گزینه‌های گران قیمت (ITM) قرار می‌دهد. این در حالی است که اطلاعات اصلی مربوط به لبخند نوسان‌پذیری و رفتار دم‌های توزیع، در اختیار معامله‌های ارزان‌قیمت (OTM) نهفته است (کریستوفرسن و همکاران، ۲۰۰۹)[3]. برای رفع این مشکل و اطمینان از اینکه مدل‌ها ساختار کامل لبخند نوسان‌پذیری را در طیف اعمال‌های مختلف صحیح برازش کنند، در این پژوهش از معیار«جذر میانگین مربعات خطای نوسان‌پذیری ضمنی[4]» استفاده شد. تابع $IV\ RMSE$ به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$IV\ RMSE=\sqrt{\frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t}\left(IV_{i,t}^{Mkt}-IV_{i,t}^{Model}(\theta)\right)^2} \qquad (7)$$

که در آن:

N_t تعداد کل قراردادهای اختیار معامله فیلتر شده در روز t، $IV_{i,t}^{Mkt}$ نوسان‌پذیری ضمنی مشاهده شده در بازار برای قرارداد i و $IV_{i,t}^{Model}(\theta)$ نوسان‌پذیری ضمنی تئوریک مدل است. برای هر روز معاملاتی t بردار پارامترهای بهینه $\widehat{\theta}_t$ از طریق حل مسئله بهینه‌سازی غیرخطی زیر به دست می‌آید:

$$\widehat{\theta}_t=\arg\min_{\theta} IV\ RMSE_t \qquad (8)$$

در مدل HN مجموعه پارامترها عبارت است از $\theta_{HN}=\{w, B_1, \alpha_1, \gamma_1, h_t\}$. در اینجا واریانس شرطی اولیه (h_t) نیز به عنوان یک پارامتر آزاد در نظر گرفته شد تا مدل بتواند خود را با شرایط لحظه‌ای بازار در هر روز تطبیق دهد. همچنین قیود لازم برای اطمینان از مثبت بودن واریانس و مانایی فرآیند ($\beta_1+\alpha_1\gamma_1^2<1$) در بهینه سازی لحاظ گردید. در مدل MSV مجموعه پارامترها عبارت است از ($\theta_{MSv}=\{k, \hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \lambda\}$) که مستقیماً شکل منحنی واریانس و گشتاورهای بالاتر را کنترل می‌کنند.

۴،۳- آزمون‌های دقت قیمت‌گذاری

برای ارزیابی جامع عملکرد مدل‌ها ارزیابی‌ها در دو سطح «ایستا» و «پویا» انجام گرفت.

برازش درون‌نمونه‌ای (In-Sample - IS)

این معیار نشان‌دهنده‌ی انعطاف‌پذیری مدل در توضیح قیمت‌های مشاهده شده در همان روز کالیبره‌سازی است. برای هر روز t، پس از تخمین پارامترهای بهینه $\widehat{\theta}_t$، خطای مدل ($IV\ RMSE$) با استفاده از داده‌های همان روز محاسبه گردید. میانگین این خطاها در طول دوره تحقیق، معیار عملکر IS است.

پیش‌بینی برون‌نمونه‌ای (Out-of-Sample - OOS)

این آزمون، قدرت پیش‌بینی مدل را می‌سنجد و برای معامله‌گران از اهمیت بیشتری برخوردار است. بدین منظور از روش بازه متحرک[5] استفاده گردید. پارامترهای کالیبره شده در روز t بدون تغییر برای قیمت‌گذاری گزینه‌های موجود در روزهای آینده ($t+k$) استفاده شد. برای بررسی دقیق‌تر تفاوت ماهیت ایستا و پویا، پیش‌بینی ها در سه افق زمانی انجام شد: کوتاه‌مدت (۱روزه)،

1 Loss Function
2 Root Mean Square Error (RMSE)
3 (Christoffersen et. Al, 2009)
4 Implied Volatility RMSE (IV RMSE)
5 Rolling Window

میان‌مدت (۵ روزه) و بلندمدت (۲۰ روزه). علاوه بر خطای کلی، خطاها به تفکیک در سود بودن[1] و زمان تا سررسید[2] طبقه‌بندی شد تا مشخص شود هر مدل در کدام بخش از لبخند نوسان‌پذیری عملکرد بهتری دارد. طبقه بندی در سود بودن بر اساس رابطه‌ی $m=s/k$ و براساس جدول ۱ انجام گرفت که در آن s قیمت دارایی پایه و k قیمت اعمال است. همچنین زمان تا سررسید برای بازه‌های کمتر از ۳۰ روز، بین ۳۰ روز تا ۹۰ روز و نهایتا بیشتر از ۹۰ روز، به ترتیب به بازه‌های کوتاه‌مدت، میان‌مدت و بلندمدت تقسیم شد.

جدول ۱- طبقه‌بندی در سود بودن

نام طبقه بندی	مقدار m
Deep OTM	$m<0.9$
OTM	$0.9 \leq m <0.97$
ATM	$0.97 \leq m \leq 1.03$
ITM	$1.03 < m \leq 1.10$
Deep ITM	$m >1.10$

۵،۳- آزمون معناداری آماری (Diebold-Mariano Test)

به منظور اطمینان از اینکه تفاوت‌های مشاهده شده در خطای پیش‌بینی مدل‌ها ناشی از شانس نیست، از آزمون دایبولد-ماریانو (DM) استفاده شد. این آزمون فرضیه صفر «برابری دقت پیش‌بینی» دو مدل را بررسی می‌کند. اگر $e^2_{HN,t}$ و $e^2_{MSV,t}$ مربع خطاهای پیش‌بینی روزانه دو مدل باشند، دنباله تفاضل خطاها به صورت $d_t=e^2_{HN,t}-e^2_{MSV,t}$ تعریف می‌شود. آماره آزمون DM به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$DM=\frac{\bar{d}}{\hat{\sigma}_{\bar{d}}} \quad (9)$$

که در آن $\bar{d}$ میانگین نمونه‌ای تفاضل خطاها و $\hat{\sigma}_{\bar{d}}$ خطای معیار آن است. با توجه به احتمال وجود خودهمبستگی در سری زمانی خطاها، برای محاسبه انحراف معیار از تخمین‌گر سازگار نیوی-وست[3] استفاده شد تا نتایج آزمون از اعتبار آماری برخوردار باشند (دایبولد و ماریانو، ۱۹۹۵)[4].

۶،۳- آزمون عملکرد پوشش ریسک پویا (Dynamic Hedging)

یک مدل ممکن است قیمت را خوب پیش‌بینی کند، اما ریسک را نادرست ارزیابی نماید. برای آزمون این موضوع، استراتژی پوشش ریسک دلتا-خنثی[5] کارودکال[6] شبیه‌سازی شد. فرض شد یک موقعیت فروش در اختیار معامله (C_t) اتخاذ شده و برای پوشش ریسک آن، Δ_t سهم از دارایی پایه (S_t) خریداری گردید. پرتفوی پوشش داده شده (V_t) در روز t تشکیل گردید و در روز بعد $t+1$ با پارامترهای جدید بازبینی شد. خطای پوشش ریسک[7] برای هر دوره به صورت زیر محاسبه شد:

$$HE_{t+1}=(C_{t+1}-C_t)-\Delta_t(S_{t+1}-S_t)-r(C_t-\Delta_t S_t)\Delta_t \quad (10)$$

در مدل HN، مقدار دلتا (Δ_{HN}) مستقیماً از فرمول بسته مدل و با در نظر گرفتن اثر اهرمی محاسبه گردید. در مدل MSV، مقدار دلتا (Δ_{MSV}) از مشتق‌گیری بسط تیلور نسبت به قیمت سهام به دست آمد. مدلی که انحراف معیار خطاهای پوشش ریسک آن کمتر بود، مدل برتر در مدیریت ریسک شناخته گردید، حتی اگر خطای قیمت‌گذاری آن بیشتر باشد (لسانس و ورینز، ۲۰۱۸).

۷،۳- بررسی ثبات پارامترها (Parameter Stability)

به عنوان آخرین معیار تشخیص صحت تصریح مدل، رفتار سری زمانی پارامترهای کالیبره شده بررسی گردید. در مدل HN پارامترهای ساختاری مانند γ باید در طول زمان ثبات داشته باشند و نوسان‌پذیری تنها از طریق تغییرات متغیر حالت (h_t) توضیح داده شود. در مدل MSV اگر پارامتر k نوسانات شدید و بی‌نظمی داشته باشد، نشان‌دهنده این است که مدل صرفاً در حال برازش

1 Moneyness
2 Maturity
3 Newey-West
4 (Diebold & Mariano, 1995)
5 Delta-Neutral Hedging
6 Covered Call
7 Hedging Error

منحنی[1] است و ساختار واقعی بازار را کشف نکرده است. برای سنجش این ویژگی، از ضریب خودهمبستگی مرتبه اول ($\rho(1)$) سری زمانی پارامترها استفاده گردید. خودهمبستگی بالا نشان‌دهنده ثبات و قابلیت اعتماد ساختاری مدل است. در بخش ۴ این پژوهش، داده‌ها و نتایج آزمون فرضیات ارایه می‌گردد.

۴- داده‌ها و نتایج پژوهش

این پژوهش با استفاده از داده های استخراج شده زنجیره قرارداد نماد اهرم از پایگاه داده سازمان فناوری بورس اوراق بهادار تهران[2] انجام گرفت. نمونه اولیه شامل ۱۹۸۲۴ داده خام از خردادماه ۱۴۰۱ تا آبان‌ماه ۱۴۰۴ بود. به منظور جلوگیری از نویز و تاثیرات منفی نقدشوندگی پایین، چندین مرحله غربالگری بر روی داده‌ها انجام گرفت. تمامی قراردادهایی که کمتر از ۱۰ روز به سررسید آنها مانده بود حذف شدند. به منظور جلوگیری از انحرافات ناشی از قیمت‌های بشدت پایین، تمامی داده‌ها با قیمت اختیار کمتر از ۵۰ ریال حذف گردید. علاوه بر این، اختیارهای به‌شدت ITM [3] و به‌شدت OTM [4]، وگا[5] بسیار کمی دارند و کوچکترین تغییر قیمت اختیار می‌تواند منجر به تغییرات مصنوعی شدید در نوسان‌ضمنی شود؛ به منظور جلوگیری از این موضوع تنها قراردادهایی که از رابطه $0.8<\frac{S}{K}<1.2$ پیروی می‌کردند انتخاب شدند که در آن S قیمت دارایی پایه و K قیمت اعمال است. با حذف اختیار های به‌شدت ITM و OTM احتمال سوگیری ناشی از نقدشوندگی پایین نیز از بین می‌رود (کریستوفرسن و همکاران، ۲۰۰۹)، (دوماس و همکارن، ۱۹۹۸). بعد از غربالگری، نمونه مورد بررسی شامل ۸۸۴۰ مشاهده از زنجیره قرارداد اختیار خرید نماد اهرم در ۸۰۱ روز معاملاتی شد. تمامی محاسبات با استفاده از پایتون انجام گرفت. در این بخش، نتایج حاصل از تخمین و کالیبره‌سازی مدل‌های HN و MSV ارائه می‌گردد. تحلیل نتایج در شش بخش اصلی پایداری پارامترها، عملکرد درون‌نمونه‌ای، توان پیش‌بینی برون‌نمونه‌ای، آزمون معناداری آماری، تحلیل ماتریس خطا و کارایی در پوشش ریسک پویا ارایه می‌گردد.

پایداری پارامترهای یک مدل قیمت‌گذاری، نشان‌دهنده توانایی آن در استخراج ویژگی‌های ساختاری بازار و عدم حساسیت بیش از حد به نویزهای روزانه است. در اینجا، ضریب تغییرات (CV)[6] اصلی ترین معیار مقایسه جهت سنجش پایداری نسبی مدل‌ها مستقل از مقیاس پارامترها است. نتیجه کالیبره‌سازی مدل‌ها در جدول ۲ ارایه شده است. نتایج نشان داد که مدل MSV با میانگین ضریب تغییرات ۱,۰۰۷۵ در مقایسه با مدل HN با مقدار ۱,۱۰۰۱، پایداری بیشتری از خود نشان داد. پارامترγ که کنترل کننده اثر اهرمی در مدل HN است، با CV معادل ۱,۶۶ بی‌ثبات ترین پارامتر در میان سایر پارامترها بود. این موضوع بیانگر آن است که مدل HN در تطبیق روزانه با تغییرات چولگی نوسان در بازار دچار چالش است و تلاش می‌کند با تغییرات شدید در این پارامتر، خطای قیمت‌گذاری را جبران کند. در مقابل پارامتر $\hat{\sigma}_2$ در مدل MSV که سطح نوسان بلندمدت را تعیین می‌کند، با CV معادل ۰,۷۲ پایدارترین رفتار را داشت، که نشان دهنده توانایی این مدل در شناسایی لایه پایدار نوسانات بازار است.

جدول ۲- بررسی میزان پایداری پارامترهای برآورد شده

نام مدل	پارامتر	میانگین	انحراف معیار	میانه	ضریب تغییرات
HN	w	۰,۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰	۰,۹۸۲۸
	α	۰,۰۰۰۰۰۱	۰,۰۰۰۰۰۱	۰,۰۰۰۰۰۱	۰,۷۷۹۴
	β	۰,۶۱۲۶۲۱	۰,۴۲۲۷۳۰	۰,۸۴۲۵۳۰	۰,۶۹۰۰
	γ	۹۶,۴۵۴۰۵۹	۱۶۱,۰۰۱۹۴۸	۹۴,۸۹۲۸۷۶	۱,۶۶۹۲
	h	۰,۰۰۰۰۰۸	۰,۰۰۰۰۱۰	۰,۰۰۰۰۰۶	۱,۳۷۹۰
MSV	$\hat{\sigma}_0$	۰,۲۸۲۲۶۵	۰,۲۵۳۶۲۹	۰,۲۶۱۳۳۵	۰,۸۹۸۵
	$\hat{\sigma}_1$	۰,۶۰۲۰۱۳	۰,۵۶۱۵۶۰	۰,۵۳۰۳۲۷	۰,۹۳۲۸
	$\hat{\sigma}_2$	۰,۳۳۷۷۰۳	۰,۲۴۵۳۴۹	۰,۳۴۳۰۲۴	۰,۷۲۶۵
	λ	۰,۶۸۸۹۴۱	۰,۸۸۲۳۱۶	۰,۵۰۸۴۳۱	۱,۲۸۰۶
	k	۰,۱۴۴۳۶۹	۰,۱۷۳۱۰۹	۰,۰۷۱۶۷۱	۱,۱۹۹۰

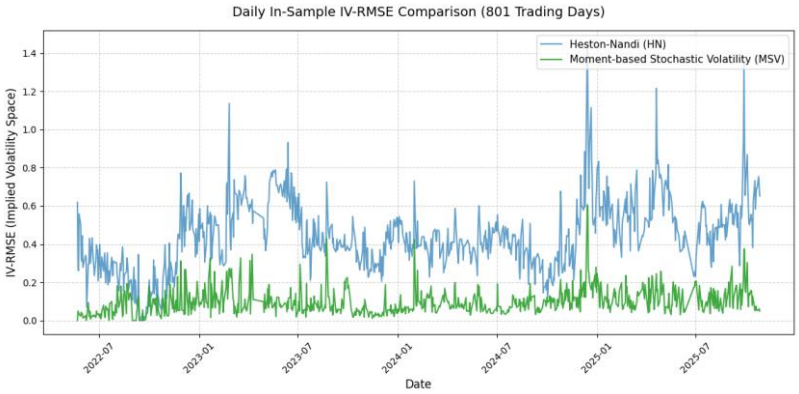
1 Curve Fitting
2 TSETMC
3 Deep ITM
4 Deep OTM
5 Vega
6 Coefficient of Variation

عملکرد درون‌نمونه‌ای نشان‌دهنده قدرت تطبیق مدل با واقعیت‌های موجود در قیمت‌های بازار است. نتیجه ارزیابی عملکرد درون نمونه مدل‌ها در جدول ۳ نشان داده شده است. میانگین *IV RMSE* مدل MSV به مراتب کمتر از مدل HN بود که بیانگر برتری چشمگیر مدل MSV در مدل‌سازی مستقیم منحنی نوسان است. مدل HN به دلیل محدودیت‌های ساختاری GARCH تمایل دارد نوسان را به سمت میانگین سوق دهد، درحالی که مدل MSV با استفاده از بسط تیلور پیرامون گشتاورهای مرتبه بالا، قادر است خمیدگی و کشیدگی لبخند نوسان را با دقت بیشتری کالیبره کند. انحراف معیار پایین تر مدل MSV نیز نشان دهنده ثبات این دقت در روزهای مختلف معاملاتی است.

جدول ۳- ارزیابی عملکرد درون‌نمونه (IS)

نام مدل	میانگین *IV RMSE*	انحراف معیار *IV RMSE*
HN	۰,۴۴۶۱۶۸	۰,۱۸۱۵۲۷
MSV	۰,۰۹۷۵۶۲	۰,۰۶۹۵۱۲

شکل ۱ نشان دهنده سری زمانی خطاهای محاسبه شده است. حفظ سطحی از خطا توسط مدل *MSV* بیانگر آن است که مدل نسبت به تغییرات رژیم‌های بازار نماد اهرم مقاومت بیشتری دارد. در مقابل مدل *HN* در بسیاری از روزها با جهش‌های ناگهانی در خطا روبرو شده است. این موضوع تایید می‌کند که محدودیت‌های ساختاری *GARCH* در این مدل اجازه انطباق سریع با تغییرات لحظه‌ای در لبخند نوسان نماد اهرم را نمی‌دهد.



شکل ۱- سری زمانی خطاهای محاسبه شده

در جدول ۴ خطای پیش‌بینی مدل‌ها در ارزیابی عملکرد برون‌نمونه در افق‌های زمانی ۱ روزه، ۵ روزه و ۲۰ روزه نشان داد شده است. مدل MSV در هرسه افق زمانی دارای خطای پیش‌بینی پایین‌تر قابل توجهی بود. با اینحال، انتظار می‌رفت با افزایش افق زمانی، بدلیل کاهش قدرت پیش‌بینی، خطای هردو مدل افزایش یابد. ثابت ماندن خطای مدل HN در محدوده ۰,۴۹ نشان می‌دهد که این مدل اساسا در قیمت‌گذاری پویایی‌های کوتاه‌مدت نوسان ناتوان است و احتمالا دارای سطحی از خطای سیستماتیک است.

جدول ۴- ارزیابی عملکرد برون‌نمونه (OOS)

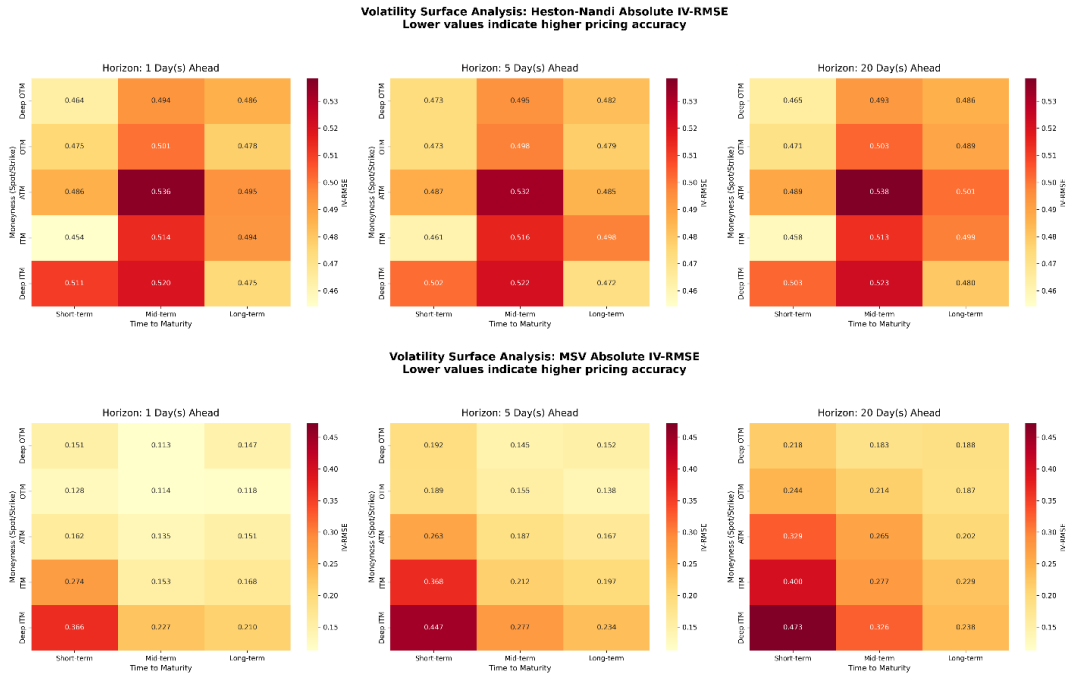
افق پیش‌بینی	*HN IV RMSE*	*MSV IV RMSE*
۱ روز	۰,۴۹۷۱	۰,۱۷۰۹
۵ روز	۰,۴۹۶۲	۰,۲۱۲۳
۲۰ روز	۰,۴۹۹۳	۰,۲۵۴۹

جدول ۵ نشان دهنده مقادیر آزمون دایبولد–ماریانو است. مقادیر بالای آماره DM نشان دهنده این است که برتری مدل MSV صرفا ناشی از انتخاب نمونه نیست و تابعی از ساختار ریاضی مدل است. کاهش این مقدار با افزایش بازه زمانی نشان‌دهنده همگرا شدن تدریجی عملکرد مدل‌ها در بازه زمانی بلندمدت است.

جدول ۵- مقادیر آزمون دایبولد–ماریانو

افق پیش‌بینی	*DM*	*P-value*
۱ روز	۳۴,۵۷	۰,۰۰۰
۵ روز	۱۳,۷۵	۰,۰۰۰
۲۰ روز	۷,۹۵	۰,۰۰۰

برای ایجاد درکی عمیق‌تر از رفتار مدل‌ها، خطای برون‌نمونه‌ای به تفکیک میزان در سود بودن و زمان تا سررسید برای هر مدل فراهم گردید. این تحلیل ، دقت مدل‌ها را در لایه‌های مختلف سطح نوسان و در افق‌های زمانی ۱، ۵ و ۲۰ روزه را بررسی می‌کند. ماتریس خطای مدل HN در شکل ۲ نشان داده شده است. مشاهده گردید که خطای این مدل در تمامی نواحی سطح نوسان‌پذیری در سطحی بالا (بین ۰,۴۵ تا ۰,۵۴) توزیع شده است. بر خلاف انتظارات تئوریک، خطای مدل HN تفاوت معناداری بین قراردادهای کوتاه‌مدت و بلندمدت نشان نداد. از طرفی بیشترین میزان خطا در افق‌های ۵ و ۲۰ روزه و در ناحیه ATM، در سررسید های میان‌مدت مشاهده گردید. از آنجا که وگا در این ناحیه در بیشترین مقدار خود قرار دارد، این خطا می‌تواند منجر به سوگیری‌های شدید در استراتژی‌های معاملاتی نوسان‌محور گردد. ماتریس خطای مدل MSV نیز که در شکل ۲ نشان داده شده است، تصویری کاملاً متفاوت و ساختارمند ارائه می‌دهد. این مدل در قراردادهای به‌شدت OTM و OTM با سررسیدهای میان‌مدت و بلندمدت بهترین عملکرد را داشت. کمترین میزان خطا در افق یک روزه معادل ۰,۱۱۳ است. با افزایش زمان تا سررسید، خطای این مدل در اکثر نواحی کاهش یافت. این پدیده نشان می‌دهد که مدل MSV در قیمت‌گذاری قراردادهای بلندمدت نماد اهرم که نوسانات ملایم‌تری دارند، پایداری بسیار بالایی دارد. بیشترین میزان خطا در ناحیه به‌شدت ITM و کوتاه‌مدت در افق پیش‌بینی ۲۰ روزه مشاهده گردید (*IV RMSE=0.473*). این موضوع می‌تواند ناشی از دو عامل باشد: ۱) نقدشوندگی پایین این قراردادها در نماد اهرم که منجر به انحراف قیمت‌های معاملاتی از ارزش تئوریک می‌شود. ۲) ماهیت بسط تیلور در این مدل که در نواحی با چولگی شدید (مانند قراردادهای به‌شدت در سود) ممکن است با خطای تقریب مواجه شود.



شکل ۲– ماتریس خطای مدل‌ها

مقایسه هم‌زمان ماتریس دو مدل نشان می‌دهد که برتری مدل MSV بر HN سیستماتیک است. درحالی که مدل HN با یک خطای یکنواخت و بالا در سطح نوسان پراکنده شده است، مدل MSV رفتاری منطبق بر واقعیت‌های بازار نشان می‌دهد. . در افق ۲۰ روزه، با وجود افزایش کلی خطاها، مدل MSV همچنان در نواحی OTM و ATM که بخش عمده حجم معاملات بازار را تشکیل می‌دهند، خطایی به مراتب کمتر از مدل HN دارد. این یافته برای مدیریت ریسک سبدهای سرمایه‌گذاری که عمدتاً از اختیار معامله‌های OTM برای پوشش ریسک استفاده می‌کنند، از اهمیت بالایی برخوردار است و مدل MSV را به گزینه‌ای کارآمدتر برای فعالان بازار سرمایه ایران بدل می‌سازد.

در جدول ۶ نتایج آزمون عملکرد پوشش ریسک پویا نشان داده شده است. مدل MSV با کاهش میانگین قدرمطلق خطا[1] به میزان ۸٪ نسبت به مدل HN، کارایی عملیاتی خود را ثابت کرد. سوگیری میانگین[2] شدیدا منفی در مدل HN نشان‌دهنده آن است که این مدل تمایل به بیش‌برآورد[3] دلتا دارد که منجر به هزینه‌های اضافی در خرید دارایی پایه برای پوشش ریسک می‌شود. در مقابل، سوگیری مثبت و نسبتا ناچیز مدل MSV نشان‌دهنده یک استراتژی پوشش ریسک متوازن‌تر و بهینه‌تر از نظر هزینه برای معامله‌گران است.

جدول ۶- نتایج آزمون عملکرد پوشش ریسک پویا

آماره	*HN*	*MSV*
MAE	۲۹۲۹۴۳,۷۸	۲۶۸۶۸۰,۹۲
RMSE	۵۰۹۹۷۲,۴۸	۴۹۱۰۷۰,۱۱
Mean Bias	-۵۸۶۷,۳۹	۹۶۰,۸۰

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش به بررسی و مقایسه تجربی عملکرد دو مدل پیشرفته قیمت‌گذاری اختیار معامله، یعنی مدل نوسان‌پذیری تصادفی گسسته هستون-ناندی HN و مدل نوسان‌پذیری تصادفی مبتنی بر گشتاورهای مرتبه بالا MSV بر روی قراردادهای اختیار معامله صندوق اهرم پرداخته شد. با کالیبره کردن روزانه این مدل‌ها طی ۸۰۱ روز معاملاتی و ارزیابی آن‌ها در ابعاد مختلف، نتایج زیر در خصوص فرضیه‌های پژوهش حاصل شد:

فرضیه اول: مدل MSV به‌دلیل پارامترسازی گشتاور بالا، در برازش درون‌نمونه عملکرد بهتری از مدل HN دارد. نتایج تجربی این پژوهش با قاطعیت این فرضیه را تایید کرد. میانگین خطای IV RMSE درون‌نمونه‌ای برای مدل MSV با مقدار ۰,۰۹۷۵۶ به مراتب کمتر از میانگین خطای مدل HN با مقدار ۰,۴۴۶۱۷ مشاهده شد. این موضوع نشان می‌دهد که استفاده از بسط تیلور پیرامون گشتاورهای مرتبه بالا در مدل MSV انعطاف‌پذیری لازم برای قیمت‌گذاری دقیق لبخند نوسان‌پذیری در زنجیره قراردادهای اختیار معامله اهرم را دارد در حالی که ساختار GARCH در مدل HN در قیمت‌گذاری کامل ویژگی‌های آماری روزانه بازار ناتوان است.

فرضیه دوم: : با توجه به اینکه مدل HN یک مدل پویا است، در تمام آزمون‌های پویا مانند پیش‌بینی برون‌نمونه، دلتا-هجینگ پویا و ثبات پارامترها نسبت به مدل MSV برتری دارد. نتایج به‌دست آمده برخلاف انتظار تئوریک، این فرضیه را رد کرد. علیرغم ماهیت پویای مدل HN، مدل MSV در تمامی آزمون‌های پویا عملکرد برتری از خود نشان داد به گونه ای که در پیش‌بینی برون‌نمونه، مدل MSV درتمامی افق‌های ۱، ۵ و ۲۰ روزه خطای کمتری نسبت به مدل HN نشان داد و آزمون دایبولد-ماریانو نیز برتری معنادار آماری مدل MSV را تایید کرد. از منظر پوشش ریسک پویا، مدل MSV با MAE کمتر (۲۶۸۶۸۰ در مقابل ۲۹۲۹۴۳) و سوگیری بسیار کمتر، کارایی عملیاتی بالاتری از خود نشان داد. میانگین ضریب تغییرات برای پارامترهای MSV نیز برابر با ۱,۰۰۷۵ بود که در مقایسه با مقدار مشاهده شده ۱,۱۰۰۱ برای مدل HN پایداری ساختاری بیشتری را نشان می‌دهد. این یافته‌ها حاکی از آن است که اگرچه مدل HN از نظر تئوریک پویایی بیشتری دارد، اما در زنجیره قراردادهای اختیار معامله نماد اهرم، مدل MSV به دلیل دقت بالاتر در کالیبره‌سازی اولیه، اثرات ماندگارتری در پیش‌بینی و مدیریت ریسک از خود بر جای می‌گذارد.

علیرغم دستاوردهای فوق، تعمیم پذیری نتایج این پژوهش با محدودیت‌هایی روبه‌روست که باید مدنظر قرار گیرند. نخست آنکه تمرکز مطالعه صرفاً بر صندوق اهرم بوده است و رفتار مدل‌ها در سایر دارایی‌های پایه با ویژگی‌های نوسانی متفاوت ممکن

1 Mean Absolute Error (MAE)
2 Mean Bias
3 Overestimation

است متفاوت باشد. دوم، تحلیل ماتریس خطا نشان داد که هر دو مدل در قراردادهای به‌شدت در سود به‌دلیل نقدشوندگی پایین و احتمالا محدودیت‌های دامنه نوسان در بورس تهران، با خطای سیستماتیک مواجه هستند. درنهایت، عدم در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی و لغزش قیمت[1] در شبیه‌سازی‌های پوشش ریسک، لزوم احتیاط در پیاده‌سازی عملیاتی این یافته‌ها را دوچندان می‌کند.

با تکیه بر نتایج این تحقیق، مسیرهای زیر برای توسعه مطالعات آتی توصیه می‌گردد:

آزمون عملکرد مدل MSV بر روی دارایی‌های متنوع‌تر نظیر صندوق‌های با پشتوانه طلا و سهام جهت سنجش پایایی مدل در صنایع مختلف. ادغام مولفه پرش با مدل MSV به منظور بهبود عملکرد در زمان وقوع تکانه‌های شدید قیمتی که از ویژگی‌های بارز بازار ایران است. بررسی اثر استفاده از توابع هدف وزن‌دهی شده بر اساس یونانی‌ها[2] (مانند وگا) برای بهبود دقت قیمت‌گذاری در قراردادهای با سررسیدهای متفاوت. مقایسه خروجی مدل‌های ساختاری نظیر MSV با مدل‌های نوین یادگیری ماشین در ترکیب با داده‌های با فرکانس بالا جهت ارتقای توان پیش‌بینی نوسانات آتی.

منابع

۱) حدادی محمدرضا، نصراللهی حسین (۱۴۰۲)، «مقایسه قیمت‌گذاری اختیار معامله با تلاطم تصادفی در مدل هستون و هستون ناندی»، تحقیقات مالی، جلد ۲۵، شماره ۴، صص ۵۹۵-۵۷۷

۲) محمودیان مائده‌سادات، عبدالباقی عطاآبادی عبدالمجید، آقاسی سعید (۱۴۰۴)، «فراتحلیل مقایسه‌ای فرصت‌های آربیتراژ مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معاملات: شواهدی از مدل‌های بلک-شولز، هستون و دوجمله‌ای»، پژوهش‌های حسابداری مالی، شماره ۱، صص ۱۲۸-۹۵

۳) نصراللهی حسین، حدادی محمدرضا (۱۴۰۴)، «مقایسه کارایی مدل‌های قیمت گذاری اختیار تحت پرش، چولگی و کشیدگی غیرنرمال»، مدیریت دارایی و تامین مالی، شماره ۴، صص ۵۶-۳۵

۴) نانوای ساوجبلاغی ژینا، محمدی دانیال، شکری نعیم، محمدی عمران (۱۴۰۳)، «شناسایی و تحلیل عوامل موثر بر خطای ارزش‌گذاری قرارداد اختیار معامله در مدل بلک-شولز-مرتون»، پژوهش‌های راهبردی بودجه و مالیه، شماره ۴، صص ۹۳-۷۱

5) Bakshi, G., Cao, C., & Chen, Z. (1997). Empirical performance of alternative option pricing models. The Journal of Finance, 52(5), 2003–2049.
6) Bates, D. S. (2022). Empirical option pricing models. Annual Review of Financial Economics, 14, 369–389.
7) Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. The Journal of Political Economy, 81(3), 637–654.
8) Chateau, J.-P., & Dufresne, D. (2017). Gram-Charlier processes and applications to option pricing. Journal of Probability and Statistics, 2017, Article 8690491.
9) Christoffersen, P., Heston, S., & Jacobs, K. (2009). The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well (CREATES Research Paper No. 2009-34). Aarhus University, School of Economics and Management.
10) Corrado, C. J., & Su, T. (1996). Skewness and kurtosis in S&P 500 index returns implied by option prices. The Journal of Financial Research, 19(2), 175–192.
11) Date, P., & Islyaev, S. (2015). A fast calibrating volatility model for option pricing. European Journal of Operational Research, 243(3), 939–947.
12) Diebold, F. X., & Mariano, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy. Journal of Business & Economic Statistics, 13(3), 253–263.
13) Duan, J.-C. (1995). The GARCH option pricing model. Mathematical Finance, 5(1), 13–32.
14) Dumas, B., Fleming, J., & Whaley, R. E. (1998). Implied volatility functions: Empirical tests. The Journal of Finance, 53(6), 2059–2106.
15) Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. The Review of Financial Studies, 6(2), 327–343.
16) Heston, S. L., & Nandi, S. (2000). A closed-form GARCH option valuation model. The Review of Financial Studies, 13(3), 585–625.
17) Hull, J., & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. The Journal of Finance, 42(2), 281–300.
18) Janková, Z. (2018). Drawbacks and limitations of Black-Scholes model for options pricing. Journal of Financial Studies & Research, 2018, Article 179814.

1 Slippage
2 Greeks

19) Jarrow, R., & Rudd, A. (1982). Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. Journal of Financial Economics, 10(3), 347–369.
20) Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. Management Science, 48(8), 1086–1101.
21) Lassance, N., & Vrins, F. (2017). A comparison of pricing and hedging performances of equity derivatives models. Applied Economics, 49(50), 5101–5117.
22) Lim, G. C., Martin, G. M., & Martin, V. L. (2005). Parametric pricing of higher order moments in S&P 500 options. Journal of Applied Econometrics, 20(3), 377–404.
23) Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of Financial Economics, 3(1–2), 125–144.
24) Moore, G. (2012). The Black-Scholes formula – Why it worked and then it didn't. The Journal of Wealth Management, 15(1), 79–84.